ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora (Tema 1) — Segundo cuatrimestre – 2019
Duración: 3 horas. — 18/XII/19 –18:00 hs.

Aclaración. En lo que sigue se presentan algunas de las posibles resoluciones de los problemas correspondientes a la evaluación integradora del 18 de diciembre de 2019. Se solicita al estudiante lector, que las lea detenidamente, que reflexione sobre lo que está leyendo y que lo compare con su propia resolución. Es posible que se haya colado algún error material involuntario, en tal caso se solicita del lector que lo corrija y que siga adelante.

---

1. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con un producto interno y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida. **Demostrar** la *ley del paralelogramo*: $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \ \forall v, w \in \mathbb{V}$.

Resolución. [*Referencia: ejercicio 2 de la Práctica 3*]

El producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, es una función que cumple

(i) Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in \mathbb{V}$

a) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

b) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \ \forall x, y \in \mathbb{V}$.

(iii) $\langle x, x\rangle > 0$ si $x \neq 0$.

La norma inducida por el producto interno $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se define por

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

En primer lugar, observamos que

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \qquad \text{(por definición de } \|\cdot\|) \\
&= \langle v, v+w\rangle + \langle w, v+w\rangle \qquad \text{(por la propiedad (i) a))} \\
&= \overline{\langle v+w, v\rangle} + \overline{\langle v+w, w\rangle} \qquad \text{(por la propiedad (ii))} \\
&= \overline{\langle v, v\rangle + \langle w, v\rangle} + \overline{\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle} \qquad \text{(por la propiedad (i) a))} \\
&= \overline{\langle v, v\rangle} + \overline{\langle w, v\rangle} + \overline{\langle v, w\rangle} + \overline{\langle w, w\rangle} \qquad \text{(por aditividad de la conjugación)} \\
&= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \langle w, w\rangle \qquad \text{(por las propiedades (iii) y (ii))} \\
&= \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \qquad \text{(por las definiciones de } \|\cdot\| \text{ y conjugación).}
\end{aligned}$$

Poniendo $-w$ en lugar de w en la identidad $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle v, w\rangle + \|w\|^2$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|v-w\|^2 &= \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle v, -w\rangle + \|-w\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle v, w\rangle + \|w\|^2.
\end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene utilizando las identidades $\langle v, -w\rangle = -\langle v, w\rangle$, y $\|-w\| = \|w\|$, que son, más o menos, inmediatas y se dejan a cargo del lector. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 &= \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle v, w\rangle + \|w\|^2 + \|v\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \\
&= 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.
\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. $\square$

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$. **Probar** que para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$ vale que $\lim_{n\to\infty} \|A^n x\| = 0$.

Resolución. [*Referencia: ejercicio 12 de la Práctica 4 y ejercicio 2 de la Práctica 5*]

Como la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es simétrica, existe una matriz ortogonal $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A = P\Lambda P^T$, donde $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son autovalores de A, y las columnas de P constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. En consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A^n = P\Lambda^n P^T$, donde $\Lambda^n = \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n)$.

Por otra parte, debido a que P es una matriz ortogonal, se sabe que la transformación lineal $v \mapsto Pv$ preserva la norma (*i.e.*, $\|Pv\| = \|v\|$). Poniendo $y = P^T x$, se puede observar que

$$\begin{aligned}
\|A^n x\| &= \left\|P\Lambda^n P^T x\right\| = \left\|\Lambda^n P^T x\right\| \\
&= \|\Lambda^n y\| = \sqrt{\left(\lambda_1^n y_1\right)^2 + \left(\lambda_2^n y_2\right)^2} \\
&= \sqrt{\lambda_1^{2n} y_1^2 + \lambda_2^{2n} y_2^2} \le \sqrt{\text{máx}\left(\lambda_1^{2n}, \lambda_2^{2n}\right)\left(y_1^2 + y_2^2\right)} \\
&\le \text{máx}\left(|\lambda_1|^n, |\lambda_2|^n\right)\|y\| = \text{máx}\left(|\lambda_1|^n, |\lambda_2|^n\right)\|x\|
\end{aligned}$$

El polinomio característico de A es $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1/4$; sus raíces son $\lambda_1 = -1/2$ y $\lambda_2 = 1/2$. Utilizando la desigualdad anterior se obtiene que

$$\|A^n x\| \le (1/2)^n \|x\|,$$

y como $(1/2)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, se concluye que $\lim_{n\to\infty} \|A^n x\| = 0$. □

Resolución alternativa. Para otra posible resolución ver la que se presenta en el Tema 2.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. **Encontrar** todos los $x \in \mathbb{R}^2$ sujetos a la restricción $x^T A x = 4$ en los que se alcanzan los extremos de $\|x\|^2$.

Resolución. [*Referencia: ejercicio 19 (b) de la Práctica 5*]

En primer lugar, observamos que $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz simétrica. De acuerdo con el *Teorema de Rayleigh*, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\lambda_{\text{mín}}(A)\|x\|^2 \le x^T A x \le \lambda_{\text{máx}}(A)\|x\|^2,$$

donde $\lambda_{\text{mín}}(A)$ y $\lambda_{\text{máx}}(A)$ son los autovalores mínimo y máximo de A, respectivamente. Además,

$$\begin{aligned}
x^T A x = \lambda_{\text{mín}}(A)\|x\|^2 &\iff x \in \mathbb{S}_{\lambda_{\text{mín}}(A)}, \\
x^T A x = \lambda_{\text{máx}}(A)\|x\|^2 &\iff x \in \mathbb{S}_{\lambda_{\text{máx}}(A)},
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{S}_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = \lambda x\right\}$ es el autoespacio asociado al autovalor λ.

El polinomio característico de la matriz A es $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2 - 1$, y sus raíces son $\lambda_1 = \lambda_{\text{mín}}(A) = 2$ y $\lambda_2 = \lambda_{\text{máx}}(A) = 4$. Como la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es simétrica y sus dos autovalores son distintos, tenemos que $\mathbb{S}_{\lambda_{\text{máx}}(A)} = \mathbb{S}_{\lambda_{\text{mín}}(A)}^{\perp}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
x \in \mathbb{S}_{\lambda_{\text{mín}}(A)} &\iff (A - 2I)x = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\iff x \in \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Que dicho en otras palabras significa que $S_{\lambda_{\text{mín}}(A)} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}^T\right\}$. En consecuencia, $S_{\lambda_{\text{máx}}(A)} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}^T\right\}$.

De acuerdo con el análisis anterior tenemos que, para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^T Ax = 4$ vale que $2\|x\|^2 \leq 4 \leq 4\|x\|^2$ o, lo que es lo mismo, $1 \leq \|x\|^2 \leq 2$, y además el mínimo se alcanza en los $x \in \mathbb{S}_{\lambda_{\text{máx}}(A)}$ tales que $x^T Ax = 4$, y el máximo se alcanza en los $x \in \mathbb{S}_{\lambda_{\text{mín}}(A)}$ tales que $x^T Ax = 4$.

En conclusión,

- Los $x \in \mathbb{R}^2$, sujetos a la restricción $x^T Ax = 4$, en los que se alcanza el mínimo de $\|x\|^2$ son de la forma $x = a\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}^T$ con $4a^2 = 4$. Es decir,

$$x \in \left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}^T\right\}.$$

- Los $x \in \mathbb{R}^2$, sujetos a la restricción $x^T Ax = 4$, en los que se alcanza el máximo $\|x\|^2$ son de la forma $x = a\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}^T$ con $2a^2 = 4$. Es decir,

$$x \in \left\{\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}.$$

$\square$

Resolución alternativa. Para otra posible resolución (un poco más geométrica) ver la que se presenta en el Tema 2.

---

4. Resolver el problema a valores iniciales $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, **y calcular** $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

Resolución. [*Referencia: ejercicios 2, 4 y 5 de la Práctica 6*]

En primer lugar resolvemos la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$.

- La ecuación característica de la ecuación diferencial, $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, tiene una raíz real doble: $\lambda = -1$. En consecuencia, las soluciones de la ecuación homogénea $y'' + 2y' + y = 0$ son las funciones pertenecientes al $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por las funciones linealmente independientes $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = te^{-t}$.

- Como $4e^{-t} \in \text{gen}\{e^{-t}, te^{-t}\}$, para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$, se postula una solución de la forma $\psi(t) = At^2e^{-t}$. Observando que $\psi' = A(2t - t^2)e^{-t}$ y que $\psi'' = A(2 - 4t + t^2)e^{-t}$ se obtiene que

$$\psi'' + 2\psi' + \psi = 2Ae^{-t}.$$

  Entonces $A = 2$ y $\psi(t) = 2t^2e^{-t}$.

De los puntos anteriores se deduce que todas las soluciones de la ecuación $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$ son de la forma

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \psi(t) \\ &= c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + 2t^2e^{-t} \\ &= e^{-t}(c_1 + c_2t + 2t^2), \end{aligned}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

En segundo lugar resolvemos el problema a valores iniciales $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

- Como $y(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t + 2t^2)$, la condición $y(0) = 0$, impone que $c_1 = 0$, y en consecuencia $y(t) = e^{-t}(c_2 t + 2t^2)$.
- Como $y'(t) = e^{-t}(c_2 + (4 - c_2)t - 2t^2)$, la condición $y'(0) = 1$, impone que $c_2 = 1$.

Por lo tanto, la solución del problema a valores iniciales $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ es

$$y(t) = e^{-t}(t + 2t^2).$$

Finalmente,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t + 2t^2}{e^t} = 0,$$

que se obtiene mediante el uso reiterado de la regla de L'Hopital aplicada al cociente $\frac{f(t)}{g(t)}$ de las funciones, $f(t) = t+2t^2$ y $g(t) = e^t$, que son de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ y que tienden a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$, ellas y sus derivadas primeras $f'(t) = 1 + 4t$, $g'(t) = e^t$. Una vez establecido que $\lim_{t\to\infty} \frac{g''(t)}{f''(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{4}{e^t} = 0$, se obtiene que $\lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} = 0$, y de allí se deduce que $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$. $\square$

---

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **Hallar** todos los $X_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que la solución del problema de valores iniciales: $X' = AX$, $X(0) = X_0$, tiene norma acotada cuando $t \to +\infty$.

Resolución. [*Referencia: ejercicio 6 de la Práctica 6*]

Poniendo $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ se puede observar que el problema general $X' = AX$ es equivalente a dos problemas más sencillos. A saber:

- Problema 1:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

- Problema 2:

$$x_3' = 3x_3.$$

El primer problema se resuelve observando que el polinomio característico de la matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ es $p(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 4$. Los autovalores de la matriz $\tilde{A}$ son: $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$, y los autoespacios asociados son, respectivamente, $\mathbb{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T \right\}$ y $\mathbb{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T \right\}$. Se concluye que la solución general del primer problema es de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, la solución general del segundo problema es

$$x_3(t) = c_3 e^{3t}, \qquad c_3 \in \mathbb{R}.$$

Se deduce que la solución general del sistema de ecuaciones $X' = AX$ es de la forma

$$X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observando que $\left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y utilizando el *Teorema de Pitágoras* se puede ver que

$$\|X(t)\|^2 = c_1^2 e^{-2t} + (c_2^2 + c_3^2)e^{6t}.$$

Se concluye que la solución del sistema $X' = AX$ está acotada cuando $t \to +\infty$ si y solamente si $c_2^2 + c_3^2 = 0$. Es decir, cuando $c_2 = c_3 = 0$. Como $X_0 = X(0)$ y

$$X(0) = c_1 \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix},$$

se arriba a la siguiente conclusión: el conjunto de todos los los $X_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que la solución del problema de valores iniciales: $X' = AX$, $X(0) = X_0$, tiene norma acotada cuando $t \to +\infty$, es el subespacio generado por $\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}^T$. $\square$

Resolución alternativa. Para otra posible resolución ver la que se presenta en el Tema 2.

ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora (Tema 2) — Segundo cuatrimestre – 2019
Duración: 3 horas. — 18/XII/19 –18:00 hs.

Aclaración. En lo que sigue se presentan algunas de las posibles resoluciones de los problemas correspondientes a la evaluación integradora del 18 de diciembre de 2019. Se solicita al estudiante lector, que las lea detenidamente, que reflexione sobre lo que está leyendo y que lo compare con su propia resolución. Es posible que se haya colado algún error material involuntario, en tal caso se solicita del lector que lo corrija y que siga adelante.

---

1. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con un producto interno y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida. **Demostrar** la *ley del paralelogramo*: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ $\forall u, v \in \mathbb{V}$.

Resolución. [*Referencia: ejercicio 2 de la Práctica 3*]

El producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, es una función que cumple

(i) Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in \mathbb{V}$

a) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

b) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ $\forall x, y \in \mathbb{V}$.

(iii) $\langle x, x\rangle > 0$ si $x \neq 0$.

La norma inducida por el producto interno $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se define por

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

En primer lugar, observamos que

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \qquad (\text{por definición de } \|\cdot\|)\\
&= \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle \qquad (\text{por la propiedad (i) a)})\\
&= \overline{\langle u+v, u\rangle} + \overline{\langle u+v, v\rangle} \qquad (\text{por la propiedad (ii)})\\
&= \overline{\langle u, u\rangle + \langle v, u\rangle} + \overline{\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} \qquad (\text{por la propiedad (i) a)})\\
&= \overline{\langle u, u\rangle} + \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle u, v\rangle} + \overline{\langle v, v\rangle} \qquad (\text{por aditividad de la conjugación})\\
&= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} + \langle v, v\rangle \qquad (\text{por las propiedades (iii) y (ii)})\\
&= \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \qquad (\text{por las definiciones de } \|\cdot\| \text{ y conjugación}).
\end{aligned}$$

Poniendo $-v$ en lugar de v en la identidad $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \|v\|^2$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|u-v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle u, -v\rangle + \|-v\|^2\\
&= \|u\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \|v\|^2.
\end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene utilizando las identidades $\langle u, -v\rangle = -\langle u, v\rangle$, y $\|-v\| = \|v\|$, que son, más o menos, inmediatas y se dejan a cargo del lector. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \|v\|^2\\
&= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.
\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. $\square$

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$. **Probar** que para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$ vale que $\lim_{n\to\infty} \|A^n x\| = 0$.

Resolución. [*Referencia: ejercicio 12 de la Práctica 4 y ejercicio 2 de la Práctica 5*]

Como la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es simétrica se la puede diagonalizar ortogonalmente y los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales entre sí (*i.e.*, si λ_1 y λ_2 son dos autovalores distintos de A, tenemos que $\mathbb{S}_{\lambda_1} \perp \mathbb{S}_{\lambda_2}$).

- En primer lugar, determinamos los autovalores de A. Como el polinomio característico de A es $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1/4$; resulta que los autovalores de A son $\lambda_1 = -1/2$ y $\lambda_2 = 1/2$.

- En segundo lugar, determinamos los autoespacios $\mathbb{S}_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \lambda x\}$ correspondientes a los autovalores de A, $\lambda \in \{-1/2, 1/2\}$. Observando que

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{S}_{\lambda_1} \quad &\iff \quad (A + (1/2)I)\, x = 0 \iff \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \quad x \in \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

  se obtiene que $S_{\lambda_1} = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T \right\}$, y como $\mathbb{S}_{\lambda_1} \perp \mathbb{S}_{\lambda_2}$ se deduce que $S_{\lambda_2} = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T \right\}$.

De los puntos anteriores se concluye que $A = P\Lambda P^T$, donde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Para simplificar la escritura ponemos $u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$ y $u_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$, y hacemos notar que $B = \{u_1, u_2\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Expresando un vector cualquiera $x \in \mathbb{R}^2$ respecto de esa base ortonormal mediante la notación $x = \alpha(x)u_1 + \beta(x)u_2$, $\alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{R}$, podemos observar que

$$\begin{aligned} A^n x &= A^n\left(\alpha(x)u_1 + \beta(x)u_2\right) = \alpha(x)A^n u_1 + \beta(x)A^n u_2 \\ &= \alpha(x)(-1/2)^n u_1 + \beta(x)(1/2)^n u_2. \end{aligned}$$

Utilizando el *Teorema de Pitágoras* obtenemos que

$$\|A^n x\|^2 = \alpha(x)^2(-1/2)^{2n} + \beta(x)^2(1/2)^{2n} = (1/2)^{2n}\|x\|^2,$$

y como $(1/2)^{2n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, se concluye que $\lim_{n\to\infty} \|A^n x\|^2 = 0$, de donde sigue inmediatamente el resultado porque $\sqrt{\cdot}$ es una función continua en todo su dominio. $\square$

Resolución alternativa. Para otra posible resolución ver la que se presenta en el Tema 1.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. **Encontrar** todos los $x \in \mathbb{R}^2$ sujetos a la restricción $x^T A x = 8$ en los que se alcanzan los extremos de $\|x\|^2$.

Resolución. [*Referencia: ejercicio 19 (b) de la Práctica 5*]

Como la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es simétrica se la puede diagonalizar ortogonalmente y los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales entre sí (*i.e.*, si λ_1 y λ_2 son dos autovalores distintos de A, tenemos que $\mathbb{S}_{\lambda_1} \perp \mathbb{S}_{\lambda_2}$).

- En primer lugar, determinamos los autovalores de A. Como el polinomio característico de A es $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2 - 1$; resulta que los autovalores de A son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$.

- En segundo lugar, determinamos los autoespacios $\mathbb{S}_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \lambda x\right\}$ correspondientes a los autovalores de A, $\lambda \in \{2, 4\}$. Observando que

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{S}_{\lambda_1} \quad &\iff \quad (A - 2I)\,x = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \quad x \in \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

  se obtiene que $S_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T \right\}$, y como $\mathbb{S}_{\lambda_1} \perp \mathbb{S}_{\lambda_2}$ se deduce que $S_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T \right\}$.

De los puntos anteriores se concluye que $A = P\Lambda P^T$, donde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \ \text{ y } \ P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Poniendo $y = P^T x$, se puede observar que la condición $x^T A x = 8$ es equivalente a $y^T \Lambda y = 8$. Como $2y_1^2 + 4y_2^2 = 8$ es la ecuación de una elipse, cuya forma canónica es $\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$.

Argumentos geométricos permiten ver que los puntos de la elipse de norma mínima son de la forma $y_m = \pm \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^T$ y los de norma máxima son de la forma $y_M = \pm \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T$. Como $\|y\| = \|P^T x\| = \|x\|$, y $x = Py$, resulta que los puntos de la elipse $x^T A x = 8$ en donde se alcanzan los extremos de $\|x\|^2$ son de la forma:

$$\begin{aligned} x_m &= Py_m = \pm \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ x_M &= Py_M = \pm \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

Resolución alternativa. Para otra posible resolución ver la que se presenta en el Tema 1.

4. Resolver el problema a valores iniciales $y'' + 2y' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, **y calcular** $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

Resolución. [*Referencia: ejercicios 2, 4 y 5 de la Práctica 6*]

En primer lugar resolvemos la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 6e^{-t}$.

- La ecuación característica de la ecuación diferencial, $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, tiene una raíz real doble: $\lambda = -1$. En consecuencia, las soluciones de la ecuación homogénea $y'' + 2y' + y = 0$ son las funciones pertenecientes al $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por las funciones linealmente independientes $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = te^{-t}$.

- Como $6e^{-t} \in \text{gen}\,\{e^{-t}, te^{-t}\}$, para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + 2y' + y = 6e^{-t}$, se postula una solución de la forma $\psi(t) = At^2e^{-t}$. Observando que $\psi' = A(2t - t^2)e^{-t}$ y que $\psi'' = A(2 - 4t + t^2)e^{-t}$ se obtiene que

$$\psi'' + 2\psi' + \psi \quad = \quad 2Ae^{-t}.$$

  Entonces $A = 3$ y $\psi(t) = 3t^2e^{-t}$.

De los puntos anteriores se deduce que todas las soluciones de la ecuación $y'' + 2y' + y = 6e^{-t}$ son de la forma

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \psi(t) \\ &= c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + 3t^2e^{-t} \\ &= e^{-t}(c_1 + c_2t + 3t^2), \end{aligned}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

En segundo lugar resolvemos el problema a valores iniciales $y'' + 2y' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

- Como $y(t) = e^{-t}(c_1 + c_2t + 3t^2)$, la condición $y(0) = 0$, impone que $c_1 = 0$, y en consecuencia $y(t) = e^{-t}(c_2t + 3t^2)$.

- Como $y'(t) = e^{-t}(c_2 + (6 - c_2)t - 3t^2)$, la condición $y'(0) = 1$, impone que $c_2 = 1$.

Por lo tanto, la solución del problema a valores iniciales $y'' + 2y' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ es

$$y(t) = e^{-t}(t + 3t^2).$$

Finalmente,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t + 3t^2}{e^t} = 0,$$

que se obtiene mediante el uso reiterado de la regla de L'Hopital aplicada al cociente $\frac{f(t)}{g(t)}$ de las funciones, $f(t) = t + 3t^2$ y $g(t) = e^t$, que son de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ y que tienden a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$, ellas y sus derivadas primeras $f'(t) = 1 + 6t$, $g'(t) = e^t$. Una vez establecido que $\lim_{t\to\infty} \frac{g''(t)}{f''(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{6}{e^t} = 0$, se obtiene que $\lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} = 0$, y de allí se deduce que $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$. $\square$

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **Hallar** todos los $X_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que la solución del problema de valores iniciales: $X' = AX$, $X(0) = X_0$, tiene norma acotada cuando $t \to +\infty$.

Resolución. [*Referencia: ejercicio 6 de la Práctica 6*]

Como la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es simétrica se la puede diagonalizar ortogonalmente, esto es, existe una matriz ortogonal $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A = P\Lambda P^T$, donde $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz diagonal cuyos coeficientes son los autovalores de A (con su respectiva multiplicidad).

- En primer lugar, determinamos los autovalores de A. Como el polinomio característico de A es $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = ((1-\lambda)^2 - 4)(3-\lambda)$; resulta que los autovalores de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$ (de multiplicidad 2).
- En segundo lugar, determinamos los autoespacios $\mathbb{S}_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \lambda x\right\}$ correspondientes a los autovalores de A, $\lambda \in \{-1, 3\}$. Observando que

$$x \in \mathbb{S}_{\lambda_1} \iff (A+I)\,x = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\iff x \in \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

se obtiene que $S_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^T \right\}$, y como $\mathbb{S}_{\lambda_2} = \mathbb{S}_{\lambda_1}^{\perp}$ se deduce que $S_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$.

De los puntos anteriores se concluye que $A = P\Lambda P^T$, donde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poniendo $Y = P^T X$, se puede observar que el sistema de ecuaciones diferenciales $X' = AX$ adopta la forma $Y' = \Lambda Y$. Si se recuerda que $\left(e^{\lambda t}\right)' = \lambda e^{\lambda t}$, la solución general del sistema diagonalizado se obtiene inmediatamente y tiene la forma

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} & c_2 e^{3t} & c_3 e^{3t} \end{bmatrix}^T, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Ahora bien, como $X = PY$ y P es una matriz ortogonal, tenemos que

$$\|X(t)\| = \|Y(t)\| = \sqrt{c_1^2 e^{-2t} + c_2^2 e^{6t} + c_3^2 e^{6t}},$$

de donde se deduce que la solución del sistema $X' = AX$ está acotada cuando $t \to +\infty$ si y solamente si $c_2 = c_3 = 0$. Como $X_0 = X(0) = PY(0)$ y

$$PY(0) = c_1 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

se concluye que el conjunto de todos los los $X_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que la solución del problema de valores iniciales: $X' = AX$, $X(0) = X_0$, tiene norma acotada cuando $t \to +\infty$, es el subespacio generado por $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^T$. $\square$

Resolución alternativa. Para otra posible resolución ver la que se presenta en el Tema 1.